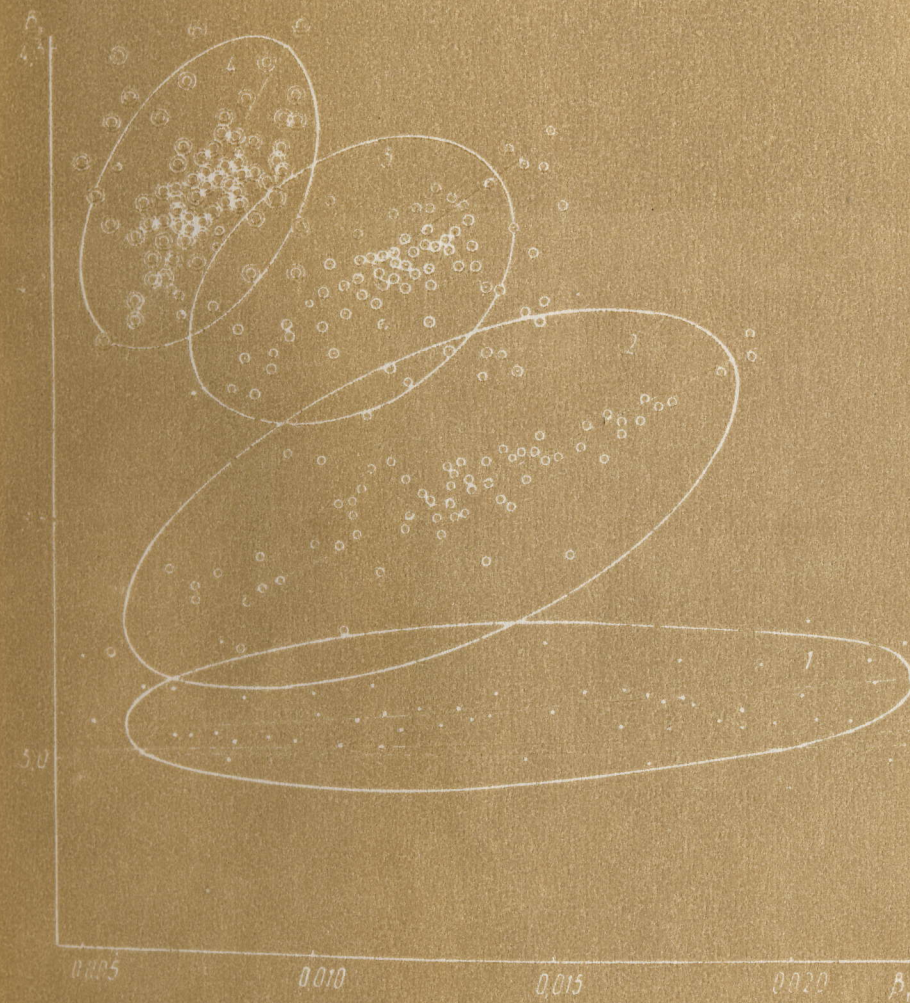




ВИБРОТЕХНИКА

УДК 534.2

УПРАВЛЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫМИ РЕЗОНАНСНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ ВИБРОПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

Р. А. БАРАУСКАС, А. А. ПЛЁПЛИС, К. М. РАГУЛЬСКИС

Рассматривается задача возбуждения в пьезокерамических вибропреобразователях (ВП) резонансных колебаний, при которых определенные точки ВП движутся по предписанным траекториям. Математическая модель ВП представляется при помощи метода конечных элементов. Получены соотношения для определения конфигурации возбуждающих электродов.

1. Введение

При использовании ВП в качестве активных звеньев механизмов и механических систем необходимо возбуждение их колебаний, при которых движения тех или иных точек ВП происходили бы по заранее предписанным траекториям. Хотя в реальности ВП обычно работают в условиях нелинейного взаимодействия с другими звеньями механических систем, в настоящей работе ограничимся задачей возбуждения линейных колебаний. Такой подход практически обоснован, так как в первом приближении ряд механизмов, в которых используются ВП, проектируется на основе способности активных звеньев совершать колебания в отдельности. Так как речь идет о резонансных колебаниях (лишь вблизи резонанса можно в реальных ВП возбудить колебания достаточной амплитуды), математическая модель ВП представляется в нормальных координатах и результирующее движение получается методом суперпозиции мод, собственные частоты которых близки к частоте возбуждения без учета вкладов в результирующее движение других мод ВП. На основе решения обратной задачи динамики получены соотношения для определения конфигурации возбуждающих электродов. По степени сложности выделяются 3 задачи: возбуждение колебаний заданной моды, возбуждение многомерных траекторий колебаний в симметричных системах ВП многофазовым электрическим напряжением и возбуждение многомерных траекторий одногармоническим электрическим напряжением в ВП, имеющих приблизительно равные собственные частоты различных мод.

2. Математическая модель ВП

Для представления математической модели ВП используем метод конечных элементов применительно к расчету пьезокерамических ВП.

Конечноэлементная система дифференциальных уравнений записывается в виде

$$\begin{aligned} [M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [\bar{K}] \{U\} + [\bar{T}] \{\Phi\} &= \{F\}, \\ [\bar{T}]^T \{U\} - [S] \{\Phi\} &= \{Q\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $[M]$, $[C]$, $[\bar{K}]$, $[\bar{T}]$, $[S]$ — матрицы масс, демпфирования, жесткости, электромеханическая и емкостная матрицы ВП соответственно; $\{U\}$ — вектор узловых перемещений ВП; $\{\Phi\}$ — вектор узловых потенциалов; $\{Q\}$ — вектор узловых зарядов; $\{F\}$ — вектор узловых усилий соответственно. Возбуждение ВП внешним электрическим сигналом происходит путем подачи на все или некоторые его электроды переменного электрического напряжения. ВП в комплексе с источником электрического напряжения представляет собой единую электромеханическую систему, для представления математической модели которой необходимо к (1) добавить уравнения электрической цепи. Однако если источник электрического напряжения можно считать достаточно мощным для того, чтобы напряжение на его выходе практически не зависело от нагрузки, можно принять, что напряжения (или потенциалы) на электродах, подключенных к источнику напряжения, заданы, т. е. известна часть элементов вектора $\{\Phi\}$. Изменим порядок нумерации узлов потенциала так, чтобы векторы узловых потенциалов и зарядов

можно было представить в виде $\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix}$, $Q = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$, а индекс „1”

соответствовал узлам потенциала, подключенным к источнику питания, индекс „2” — остальным узлам. Тогда (1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} [M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [\bar{K}] \{U\} + [\bar{T}_1] \{\Phi_1\} + [\bar{T}_2] \{\Phi_2\} &= \{F\}, \\ [\bar{T}_1]^T \{U\} - [S_{11}] \{\Phi_1\} - [S_{12}] \{\Phi_2\} &= \{Q_1\}, \\ [\bar{T}_2]^T \{U\} - [S_{12}]^T \{\Phi_1\} - [S_{22}] \{\Phi_2\} &= \{Q_2\}. \end{aligned} \quad (2)$$

В (2) известны потенциалы $\{\Phi_1\}$, которые задаются при помощи внешнего источника напряжения, и $\{Q_2\} = 0$, так как эти узлы являются электрически изолированными, т. е. не имеют электрического контакта ни с внешними носителями заряда, ни с другими узлами того же ВП. Исключив в системе (2) $\{\Phi_1\}$ и $\{Q_2\}$ из числа неизвестных и принимая, что на ВП не действуют внешние механические силы ($\{F\} = 0$), получим уравнение для определения перемещений в виде

$$\begin{aligned} [M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} &= -[T] \{\Phi_1\}, \\ \text{где } [K] &= [\bar{K}] + [\bar{T}_2][S_{22}]^{-1}[\bar{T}_2]^T, \\ [T] &= [\bar{T}_1] - [\bar{T}_2][S_{22}]^{-1}[S_{12}]^T. \end{aligned} \quad (3)$$

Полученное уравнение (3) будем считать основным и в дальнейшем все соотношения получать на его основе.

Чтобы представить уравнение (3) в нормальных координатах, решим задачу собственных значений

$$\det[K] - \omega^2[M] = 0, \quad (4)$$

в результате чего получим n собственных угловых частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ и n собственных векторов, которые запишем в матрицу Δ по столбцам, т. е. $\Delta = [\{\delta_1\}, \{\delta_2\}, \dots, \{\delta_n\}]$.

i -ю моду ВП представляет собой пара $\omega_i, \{\delta_i\}$. Для перехода в нормальные координаты осуществим трансформацию координат $\{U\} = [\Delta] \{z\}$, где $\{z\}$ — вектор перемещений в нормальных координатах. При условии, что собственные векторы нормированы в смысле $[\Delta]^T[M][\Delta] = [I]$, где $[I]$ — единичная матрица, уравнения (3) в нормальных координатах принимают вид

$$\ddot{z}_i + 2\omega_i c_i \dot{z}_i + \omega_i^2 z_i = -\{\delta_i\}^T [T] \{\Phi_i\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4a)$$

причем $[\Delta]^T[C][\Delta] = \text{diag}(2\omega_i c_i)$ и $[\Delta]^T[K][\Delta] = \text{diag}(\omega_i^2)$.

3. Расчет оптимального возбуждения заданной моды колебаний ВП

Наиболее простой задача синтеза конфигурации электродов возбуждения получается в случае, когда требуется возбудить лишь одну моду колебаний, скажем, i -ю. Тогда при условии, что частота возбуждения $\omega = \omega_i$, будем вместо системы (4) из n независимых уравнений рассматривать лишь i -е уравнение. Правосторонний член $-\{\delta_i\}^T [T] \{\Phi_i\}$ можно трактовать как эквивалентное усилие возбуждения i -й моды в нормальных координатах. Ясно, что оптимальные условия для возбуждения i -й моды колебаний получатся в том случае, когда это эквивалентное усилие будет максимальным по модулю. Пусть элементы вектора $\{\Phi_i\}$ являются гармонически изменяющимися величинами $\{\Phi_i\} = \{\Phi^A\} \sin \omega t$ и амплитуда их задана заранее, $\Phi_j^A = \pm \Phi^*$, т. е. имеется генератор электрического напряжения, на выходе которого можно получить лишь электрический сигнал вида $\pm \Phi^* \sin \omega t$. Тогда максимальная по модулю амплитуда эквивалентной возбуждающей силы для i -й моды получится в случае, когда для каждой компоненты Φ_j^A вектора возбуждающих напряжений $\{\Phi^A\}$ справедливо равенство

$$\Phi_j^A = -\text{sign}(\{\delta_i\}^T [T]_j), \quad (5)$$

где $(\{\delta_i\}^T [T]_j)$ означает j -ю компоненту вектора-строки $\{\delta_i\}^T [T]$. Таким образом, получив из выражения (5) значения возбуждающих напряжений в каждом узле потенциала ВП (на каждом сегменте электрода, определяемом конфигурацией конкретного конечного элемента), нетрудно определить зоны возбуждения (сегментацию электродов) ВП.

4. Возбуждение многомерных траекторий резонансных колебаний ВП многофазовым напряжением

Для возбуждения многомерных траекторий колебаний точек ВП необходимо возбудить колебания сразу нескольких мод, причем колебания отдельных мод должны происходить с определенной разницей в фазах, которую будем считать предписанной заранее и равной $\Delta\varphi$. Разберем случай, когда конфигурация ВП такова, что он обладает несколькими модами, собственные частоты которых идентичны. Такими модами обладают симметричные ВП: кольца, круговые и квадратные пластинки и т. п. Разберем случай, когда требуется одновременно возбудить колебания i -й и j -й мод, собственные частоты которых $\omega_i = \omega_j = \tilde{\omega}$. Уравнения колебаний в нормальных координатах представим в виде

$$\begin{cases} \ddot{z}_i + 2\tilde{\omega} c_i \dot{z}_i + \tilde{\omega}^2 z_i = -\{\delta_i\}^T [T] \{\Phi^A i\} \sin \omega t, \\ \ddot{z}_j + 2\tilde{\omega} c_j \dot{z}_j + \tilde{\omega}^2 z_j = -\{\delta_j\}^T [T] \{\Phi^A j\} \sin(\omega t + \Delta\varphi), \end{cases} \quad (6)$$

где ненулевые значения компонент векторов $\{\Phi_k^A i\}$ и $\{\Phi_k^A j\}$ не должны совпадать, т. е. $\Phi_k^A i \Phi_k^A j = 0, k = \overline{1, m}$. Если бы для какого-либо k $\Phi_k^A i \Phi_k^A j \neq 0$, это означало бы, что к одному и тому же электроду подключены два переменных напряжения с различными фазами, что практически невозможно. Так как левые стороны уравнений (6) идентичны, соотношения амплитуд и фаз колебаний z_i и z_j определяются соотношениями амплитуд и фаз возбуждающих усилий, т. е. правых сторон уравнений (6). Так как разность фаз $\Delta\varphi$ — заданная величина, остается подобрать амплитуды Φ_k^A компонент вектора $\{\Phi\}^A$ таким образом, чтобы было удовлетворено условие

$$\frac{[\delta_i]^T [T] \{\Phi^A i\}}{[\delta_j]^T [T] \{\Phi^A j\}} = \alpha, \quad (7)$$

где α — заданное соотношение амплитуд колебаний ВП на модах i и j . Если нельзя найти такие Φ_k^A , значения которых точно удовлетворяли бы соотношению (7), следует искать приближенное решение. Задача оптимизации записывается в виде

$$\begin{cases} \max_{\{\Phi^A\}} |[\delta_i]^T [T] \{\Phi^A i\}| \\ \text{при ограничении (7),} \\ \Phi_k^A i \Phi_k^A j = 0, k = \overline{1, m}, \\ \Phi_k^A i, \Phi_k^A j \in \{\Phi^*, -\Phi^*\}. \end{cases} \quad (8)$$

Такую задачу можно решить, например, путем полного перебора вариантов возбуждения или другими методами дискретной оптимизации. Наличие большего числа возможных амплитуд возбуждения, чем $\Phi^*, -\Phi^*$, изменяет лишь вид ограничения $\Phi_k^A \in \{\Phi^*, -\Phi^*\}$ в задаче оптимизации (8) и не вносит существенных осложнений.

5. Возбуждение многомерных траекторий резонансных колебаний ВП однофазовым напряжением

Получение многомерных траекторий колебаний при возбуждении однофазовым сигналом возможно лишь в том случае, когда собственные частоты возбуждаемых мод колебаний немного различны и близки к частоте возбуждения, т. е. $\omega_i \approx \omega_j \approx \omega$. Образование разности фаз схематически показано на рис. 1, где представлены амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики колебаний ВП на модах i и j . Разность фаз возбуждаемых колебаний различных мод является функцией значения частоты возбуждения ω . Конкретная величина $\Delta\varphi(\omega)$ зависит от разности собственных частот ω_i и ω_j , а также от значения добротности колебательной системы, т. е. от остроты пиков АЧХ. Высота пиков АЧХ, очевидно, зависит от выбранного способа возбуждения и заранее неизвестна. Алгоритм расчета возбуждения следующий.

1. Рассматривается система уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{z}_i + 2\omega_i c_i \dot{z}_i + \omega_i^2 z_i = -\{\delta_i\}^T [T] \{\Phi^A\} \sin \omega t, \\ \ddot{z}_j + 2\omega_j c_j \dot{z}_j + \omega_j^2 z_j = -\{\delta_j\}^T [T] \{\Phi^A\} \sin \omega t. \end{cases} \quad (9)$$

Для z_i и z_j строится ФЧХ по известным формулам [4]. АЧХ строится для случая единичного возбуждения, т. е. когда правые стороны (9) равны $\sin \omega t$.

2. По ФЧХ, которые не зависят от способа возбуждения, определяется значение ω , при котором разность фаз $\Delta\varphi$ равна заданной. Отмечаются значения амплитуд на обеих АЧХ, соответствующие этой частоте возбуждения (на рис. 1 они обозначены a_i, a_j).

3. Пусть заранее заданное соотношение амплитуд колебаний мод $\frac{z_i^A}{z_j^A} = \alpha$. Тогда вектор возбуждения $\{\Phi^A\}$ должен быть таким, чтобы удовлетворялось соотношение

$$\frac{\{\delta_i\}^T [T] \{\Phi^A\} a_j}{\{\delta_j\}^T [T] \{\Phi^A\} a_i} = \alpha. \quad (10)$$

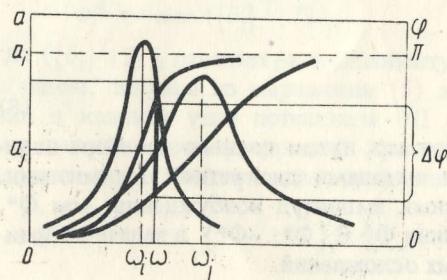
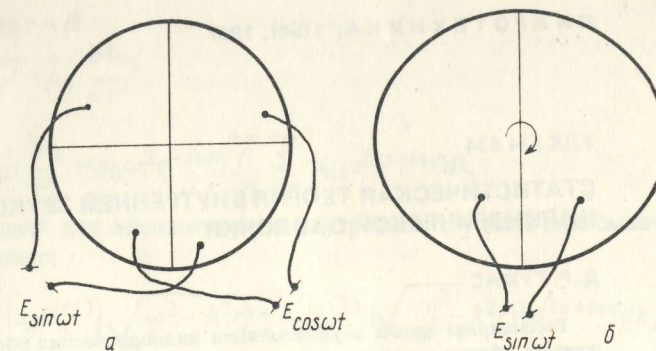


Рис. 1

Рис. 2



Следует решить задачу оптимизации:

$$\begin{cases} \max_{\{\Phi^A\}} \{\delta_i\}^T [T] \{\Phi^A\} \\ \text{при ограничении (10),} \\ \Phi_k^A \in \{\Phi_1^* - \Phi_m^*\}. \end{cases} \quad (11)$$

(В (11) нет ограничения $\Phi_k^{Ai} \Phi_k^{Aj} = 0, k = \overline{1, m}$, так как входные переменные напряжения на всех электродах синфазны.) Ясно, что обычно значение ω , при котором разность фаз колебаний равна $\Delta\varphi$, не единственно, поэтому следует применить вышеописанный алгоритм и для других возможных значений частоты возбуждения ω , а из полученных результатов подобрать оптимальный.

Примеры

Круговая пластинка совершает колебания в своей плоскости. Если у нее правильная окружность, каждая резонансная частота, кроме первой, соответствует 2 модам. Для обеспечения движения центра пластинки по окружности необходимо возбуждение ее со сдвигом фаз, как это показано на рис. 2а.

У эллипсоидальной пластинки (рис. 2б) есть пары резонансных частот, различие которых зависит от соотношения длин полуосей эллипса. Можно найти такое соотношение длин полуосей, чтобы круговая траектория центра получилась при помощи однофазового возбуждения (рис. 2б).

Литература

- Бансявичюс Р. Ю., Рагульскис К. М. Вибродвигатели. Вильнюс: Мокелас, 1981.
- Бараускас Р. А., Кульветис Г. П., Рагульскис К. М. Расчет и проектирование вибродвигателей. Л.: Машиностроение, 1984.
- Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
- Вибрации в технике: Справочник: В 6 т. М.: Машиностроение, 1979. Т. 1.

Каунас

Ноябрь, 1986